Módulo 8 — Divisibilidade – Múltiplos; Divisores; Critérios de divisibilidade; Paridade dos números inteiros

Atividades para sala

01 E

Para que o número seja divisível por 2 e por 5, é necessário que termine em zero, logo b = 0. Para que o número seja divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9, assim:

$5 + 7 + a + 3 + 0 = a + 15$

O múltiplo de 9 mais próximo de a + 15 é 18 (quando a = 3). O múltiplo seguinte é 27, o que implicaria o valor de a = 12, o que é impossível, uma vez que **a**, como algarismo, deve variar de 0 a 9.

02 E

O número de divisores positivos de N, diferentes de N, é dado por $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) – 1$, com $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z = 0$.

Observação: Considerando o enunciado rigorosamente, a resposta seria $2 \cdot (x + 1) \cdot (y + 1) – 1$, com $x \geq 1$ e $y \geq 1$.

03 C

Entre 2131 e 2136, o único número divisível por 7 é 2135. Tal divisão mostra que, caso o professor escolha esse número, haveria 305 sequências de 7 letras (dos alunos, começando no B e terminando no A). Supondo o número 304 e multiplicando-o por 7, obtém-se o número 2128, isto é, ao contar até 2128, o professor estará no fim da sequência, ou seja, no aluno A.

Sendo assim, 2129 será o aluno B; 2130, C; 2131, D; 2132, E; 2133, F; 2134, G; 2135, A; 2136, B. Pelo intervalo sugerido pelo aluno [2131, 2136], percebe-se que o aluno D poderá ser o líder.

04 E

O número 16 é múltiplo de 2; logo, a pessoa em questão perdeu 8 kg. Conclui-se, então, que sua massa, no início da campanha, era de 93 + 8 = 101 kg.

05 B

Estendendo o primeiro lençol, serão utilizados 4 prendedores. Para cada lençol a mais, serão necessários 3 prendedores. Logo, em cada varal com 9 lençóis são utilizados $4 + 8 \cdot 3 = 28$ prendedores. Em consequência, como $84 = 9 \cdot 9 + 3$, o resultado pedido é $9 \cdot 28 + 4 + 2 \cdot 3 = 262$.

06 B

Sejam M = ab e N = ba, com $a, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ e $a > b$.

Tem-se:

$$ab – ba = ba – 1 \Rightarrow 10a + b = 20b + 2a – 1$$
$$\Rightarrow 8a = 19b – 1$$

Ou seja, 19b – 1 é um múltiplo de 8. Por verificação, conclui-se que a = 7 e b = 3 são os únicos valores possíveis para **a** e **b**. Logo, M + N = 73 + 37 = 110.

Atividades propostas

01 C

$$\begin{cases} x = 16q_1 + 12 \\ x = 18q_2 + 12 \end{cases} \Rightarrow 16q_1 + 12 = 18q_2 + 12$$

$16q_1 = 18q_2$

$8q_1 = 9q_2$ (I)

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \begin{cases} 8q_1 = 9q_2 \\ q_1 + q_2 = 68 \Rightarrow \end{cases}$$

$9q_1 + 9q_2 = 9 \cdot 68 \Rightarrow$

$9q_1 + 9q_2 = 612$

$9q_1 + 8q_1 = 612$

$q_1 = \dfrac{612}{17} = 36$

$q_1 = 36$

$x = 16 \cdot 36 + 12 \Rightarrow x = 588$

02 B

$$\begin{array}{l|l} N & a + b \\ \hline 6 & 7 \end{array} \Rightarrow$$

$N = 7(a + b) + 6$

$N = 7a + 7b + 6$

$ab = 7a + 7b + 6$

$10a + b = 7a + 7b + 6$

$3a – 6b = 6$ $\div 3$

① $a – 2b = 2$

$$\begin{array}{l|l} P & a – b \\ \hline 2 & 6 \end{array} \Rightarrow$$

$P = 6 \cdot (a – b) + 2$

$P = 6a – 6b + 2$

$ba = 6a – 6b + 2$

$10b + a = 6a – 6b + 2$

$– 2 = 5a – 16b$ ou $5a – 16b = –2$ ②

Resolvendo o sistema composto por ① e ②, tem-se:

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} a - 2b = 2 \\ 5a - 16b = -2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-8)} \begin{cases} -8a + \cancel{16b} = -16 \\ \underline{5a - \cancel{16b} = -2} \oplus \end{cases}$$

$$-3a = -18$$

$$a = 6$$

Substituindo o valor recém-descoberto de **a** na equação ①, tem-se:

$6 - 2b = 2$

$4 = 2b \Rightarrow b = 2$

Logo: $N - 2P = ab - 2 \cdot ba$
$= 62 - 2 \cdot 26$
$= 62 - 52 = 10$

03 **A**

Pela condição dada, tem-se:
$123456789 \cdot d_1d_2$
$10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$= 10 + 18 + 24 + 28 + 30 + 30 + 28 + 24 + 18 = 210$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 11 \\ \hline \underline{-209} & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $d_1 = 0$
Para o cálculo de d_2, tem-se:
$10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 0 =$
$= 20 + 27 + 32 + 35 + 36 + 35 + 32 + 27 = 244$

$$\begin{array}{r|l} 244 & 11 \\ \hline \underline{22} & 22 \\ 24 & \\ \underline{22} & \\ 2 & \end{array}$$

Como o resto é 2:
$d_2 = 11 - s = 11 - 2 = 9$
Portanto, $d_1 = 0$ e $d_2 = 9$.

04 **D**

O número 24 possui 8 divisores (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24). Há, portanto, 8 possibilidades para essa divisão.

05 **C**

Sendo $162 = 2 \cdot 3^4$ e $90 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$, tem-se:

mdc $(162, 90) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Desse modo, o resultado pedido é dado por $\frac{162+90}{18} = \frac{252}{18} = 14$.

06 **B**

A soma de todos os algarismos do número N é dada por $s = 200 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 2015 \cdot 0 = 600$. Todo quadrado perfeito que é divisível por 3 é também divisível por 9. Como a soma dos algarismos de N é 600, nota-se que N não é um quadrado perfeito, pois 600 é divisível por 3 e não divisível por 9. Assim, independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.

07 **E**

O número 96 pode ser escrito como $2^5 \cdot 3^1$. Dessa forma, ele possui $5 \cdot (1 + 1) = 10$ divisores naturais pares, e a soma de todos os seus divisores é zero, pois existem os positivos e os negativos.

08 **C**

Sejam **m** e **h**, respectivamente, o número de meninas e o número de meninos da torcida. Como $m = 2h$, segue que $m + h = 3h$, ou seja, o número total de torcedores é um múltiplo de 3. No entanto, tem-se que:

$37 + 40 + 44 = 121 = 3 \cdot 40 + 1$;

$37 + 40 + 46 = 123 = 3 \cdot 41$;

$37 + 44 + 46 = 127 = 3 \cdot 42 + 1$ e

$40 + 44 + 46 = 130 = 3 \cdot 43 + 1$.

Portanto, a única combinação de ônibus cuja soma dos passageiros é um múltiplo de 3 é a dos ônibus I, II e IV. Logo, esses ônibus transportam a torcida; e o ônibus dos atletas é o de número III.

09 **C**

Seja N = ab, com **a** e **b** naturais menores do que 9 ou iguais a 9. Invertendo-se a ordem dos algarismos de N, obtém-se o número ba, tal que:

$ab - ba = 27 \Rightarrow 10a + b - (10b - a) = 27$

$\Rightarrow 9a - 9b = 27 \Rightarrow a - b = 3$

Além disso, como a soma dos algarismos de N é igual a 9, vem:

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

Então, $N = ab = 63 = 3^2 \cdot 7$, e, portanto, a quantidade de divisores naturais de N é $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$.

10 **C**

Apareceu duas vezes na lista o nome das pessoas que tinham um número par e múltiplo de 3, que, no intervalo dado, é o conjunto {6, 12, 18, ..., 120}. Como $1 \cdot 6 = 6$; $2 \cdot 6 = 12$; $3 \cdot 6 = 18$, ..., $20 \cdot 6 = 120$, há 20 números nesse conjunto.

11 **D**

Para que todas as distâncias sejam iguais entre os pontos, deve ser calculado o m.d.c entre as distâncias. Fatorando os valores dados:

$15 = 3 \cdot 5$;

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$;

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$;

$500 = 2^2 \cdot 5^3$.

Como o m.d.c é dado pelos fatores comuns de menor expoente, tem-se:

m.d.c (15, 70, 150, 500) = 5

O número de vezes em que a distância aparece é:

$$x = \frac{15}{5} + \frac{70}{5} + \frac{150}{5} + \frac{500}{5}$$

$x = 3 + 14 + 30 + 100 \Rightarrow x = 147$

12 **D**

Cada folha de um livro é composta por duas páginas; então, sempre os numerais que compõem a numeração da folha são um par e um ímpar cuja soma será ímpar. Como foram rasgadas quatro folhas, a soma de quatro ímpares obrigatoriamente será par.