## Módulo 6 Análise combinatória I – Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem

### Atividades para sala

**01** C

$$\frac{3!\cdot(x-1)!}{4\cdot(x-3)!}=\frac{182\cdot(x-2)!-x!}{2\cdot(x-2)!}\Rightarrow$$

$$\frac{3!\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{4}=\frac{182-x(x-1)}{2}\Rightarrow$$

$$6(x-1)(x-2)=364-2x^2+2x\Rightarrow$$

$$8x^2-20x-352=0\Rightarrow$$

$$8x^2-20x-88=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{5\pm27}{2}\Rightarrow x=8 \text{ ou } x=\frac{22}{4} \text{ (não convém)}$$

Portanto, 8 é um cubo perfeito.

**02** B

$$(n+1)!-n!=n\cdot n!$$

$$n=1\Rightarrow \cancel{2!}-1!=1\cdot1!$$

$$n=2\Rightarrow \cancel{3!}-\cancel{2!}=2\cdot2!$$

$$n=3\Rightarrow \cancel{4!}-\cancel{3!}=3\cdot3!$$

$$\vdots$$

$$n=50\Rightarrow 51!-\cancel{50!}=50\cdot50!$$

$$51!-1!=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+50\cdot50!$$

Logo: $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+50\cdot50!=51!-1$

**03** A

$$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot2n=x$$

$$2(1)\cdot2(2)\cdot2(3)\cdot2(4)\cdot\ldots\cdot2n=x$$

$$\underbrace{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)}_{n!}\cdot\underbrace{(2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2)}_{n\text{ vezes}}=x$$

$$n!\cdot2^n=x$$

**04** B

Desde que o algarismo das unidades seja par e diferente de zero, têm-se 4 maneiras de escolher esse algarismo. Portanto, como existem 10 possibilidades para o algarismo das dezenas e 10 maneiras de escolher o algarismo das centenas, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é $4\cdot10\cdot10=400$.

**05** D

Pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é $4\cdot4\cdot4=64$.

**06** A

- Total de placas possíveis no modelo em estudo: $26^4\cdot10^3$
- Total de placas possíveis no modelo atual: $26^3\cdot10^4$
- Razão entre os dois valores: $\dfrac{26^4\cdot10^3}{26^3\cdot10^4}=2,6$

Portanto, o aumento será de 2,6 – 1 = 1,6 (160%), ou seja, menos que o dobro.

**07** B

Há 3 escolhas para a cor da pedra que ficará no vértice A. Além disso, podem ocorrer 2 casos em relação às pedras que ficarão nos vértices B e D: (I) as cores das pedras em B e D são iguais; (II) as cores das pedras em B e D são distintas.

Portanto, as configurações possíveis são:

(A, B, C, D) = (3, 1, 2, 1), e (A, B, C, D) = (3, 2, 1, 1), o que corresponde a $3\cdot1\cdot2\cdot1+3\cdot2\cdot1\cdot1=12$ joias distintas.

**08** A

Pelo PFC, existem $5\cdot6\cdot9=270$ respostas possíveis. Portanto, o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta, porque há 280 – 270 = 10 alunos a mais do que o número de respostas possíveis.

**09** C

Observando a diferença entre a pontuação total da Escola II e a das outras escolas, tem-se que a Escola II será campeã quaisquer que sejam as notas das Escolas I, III e V. Logo, em relação a essas escolas, há 5 notas favoráveis para cada uma.

Por outro lado, como a Escola II vence a Escola IV em caso de empate, e tendo a Escola IV uma vantagem de dois pontos em relação à Escola II, a última será campeã nos seguintes casos:

- 6 para a Escola IV e 8,9 ou 10 para a Escola II;
- 7 para a Escola IV e 9 ou 10 para a Escola II;
- 8 para a Escola IV e 10 para a Escola II.

Assim, a resposta é $3\cdot5\cdot5\cdot5+2\cdot5\cdot5\cdot5+1\cdot5\cdot5\cdot5=750$.

### Atividades propostas

**01** E

Seja S = 30!; então:

$S=30\cdot29\cdot28\ldots3\cdot2\cdot1$

Sabe-se que, como S é obtido pelo produto dos números naturais de 1 a 30, todos os números primos que aparecem nesse intervalo são divisores de S = 30!.
Portanto, a soma é igual a:
2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129

**02** **A**

$$\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n+1)!}(n-1)\cancel{(n-2)!}} = 4 \Rightarrow$$

$$\frac{n+2}{n-1} = 4 \Rightarrow 4n - 4 = n + 2 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

**03** **B**

$$n! + 1 + n! + 2 + ... + n! + n = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$\underbrace{n! + n! + n! + ... + n!}_{n} + \underbrace{1 + 2 + 3 + ... + n}_{\text{P.A. de n}} = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$n \cdot n! + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$n \cdot n! = \frac{n^2 + 49n}{2} - \frac{n^2 + n}{2}$$

$$n \cdot n! = \frac{48n}{2}$$

$$n \cdot n! = 24n$$

$$n! = 4!$$

$$n = 4$$

**04** **E**

$$A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 49 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 50}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 50}\right)$$

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 49 \cdot 50}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2 \cdot 25} =$$

$$A = \frac{50!}{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2)}_{25\ \text{vezes}}\underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 25)}_{25!}} = \frac{50!}{2^{25} \cdot 25!}$$

**05** **A**

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$
$\vdots$
$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \alpha ... zyx0$

---

$4! + 6! + 8! + ... + 100! = \alpha ... yx4$

Algarismo das unidades

**06** **A**

$$\frac{n! \cdot 3^{n+1}}{3^{n-2} \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot 3^{n+1}}{3^{n-2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} =$$

$$\frac{3^{n+1-(n-2)}}{n^2 + 3n + 2} = \frac{3^3}{n^2 + 3n + 2} = \frac{27}{n^2 + 3n + 2}$$

**07** **B**

Considerando como vogais apenas as letras **a**, **e**, **i**, **o** e **u**, há 5 possibilidades para cada letra e 5 possibilidades para cada algarismo. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $5^7 = 78\,125$.

**08** **A**

De acordo com as informações, tem-se:

0110 | 1000 | 0011 | 0101

Portanto, esse código corresponde ao número 6835.

**09** **D**

Pelo Princípio Multiplicativo, podem-se formar $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 = 23^4$ códigos, sem qualquer restrição, utilizando-se 23 letras do alfabeto. Por outro lado, o número de códigos em que figuram apenas vogais, também pelo Princípio Multiplicativo, é dado por $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Em consequência, o resultado pedido é igual a $23^4 - 5^4$.

**10** **B**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Cor 1 | | |
| Cor 1 | Cor 3 | Cor 2 | Cor 1 |
| | Cor 2 | | |

De acordo com as condições do problema, no máximo três faces utilizarão a primeira cor, no máximo 2 faces, a segunda cor, e, finalmente, uma face, a terceira cor. Portanto, o menor número de cores necessárias para pintar o cubo é 3.

**11** **D**

Princípio Fundamental da Contagem

$$\underbrace{6}_{\text{entrar}} \cdot \underbrace{5}_{\text{sair}} = 30$$

**12** **B**

Considerando os percursos ABCX, ADEX, AFX.

$$ABCX \Rightarrow \underbrace{A \to B}_{1} \cdot \underbrace{B \to C}_{2} \cdot \underbrace{C \to X}_{3} = 6 \text{ caminhos.}$$

$$ADEX \Rightarrow \underbrace{A \to D}_{2} \cdot \underbrace{D \to E}_{2} \cdot \underbrace{E \to X}_{3} = 12 \text{ caminhos.}$$

$$AFX \Rightarrow \underbrace{A \to F}_{3} \cdot \underbrace{F \to X}_{2} = 6 \text{ caminhos.}$$

Total: $6 + 12 + 6 = 24$ caminhos.

**13** **C**

Cores primárias: 3 (vermelho, amarelo e azul).
Cores secundárias: 3 (verde [amarelo + azul], violeta [azul + vermelho] e laranja [amarelo + vermelho]).
Cada uma dessas cores terá três tonalidades (normal, clara e escura).
Preto e branco: 2.
Portanto, o total de cores será $3 \cdot (3 + 3) + 2 = 20$.

**14** **D**

Cada ponto pode ou não se destacar em relação aos demais. Logo, pelo Princípio Fundamental da contagem, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ conjuntos possíveis, sendo que em um deles nenhum dos pontos se destaca em relação aos demais. Portanto, o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é $64 - 1 = 63$.

**15** **B**

Números primos do teclado: 2, 3, 5, 7
Número de senhas: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**16** **C**

| 1 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

$= 2^8 = 256$

**17** **B**

A estratégia conveniente é retirar as letras na ordem FGV ou GFV. De fato, considerando a sequência FGV, para que as letras sejam da mesma cor, pelo Princípio das Gavetas, a pessoa deverá retirar 6 letras F, 8 letras G e 1 letra V, totalizando 15 letras. O raciocínio para a sequência GFV é análogo.

**18** **E**

Há apenas duas sequências possíveis (I = interior; L = litoral)

I L I L I L I L I L I L ou L I L I L I L I L I L I

Em números, tem-se:

$2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 =$
$= 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2$