



Módulo 6

Análise combinatória I – Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem



Atividades para sala

01 C

$$\frac{3!(x-1)!}{4 \cdot (x-3)!} = \frac{182 \cdot (x-2)! - x!}{2 \cdot (x-2)!} \Rightarrow$$

$$\frac{3!(x-1) \cdot (x-2)}{4} = \frac{182 - x(x-1)}{2} \Rightarrow$$

$$6(x-1)(x-2) = 364 - 2x^2 + 2x \Rightarrow$$

$$8x^2 - 20x - 352 = 0 \Rightarrow$$

$$8x^2 - 20x - 88 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm 27}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = \frac{22}{4} \text{ (não convém)}$$

Portanto, 8 é um cubo perfeito.

02 B

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!$$

$$n = 1 \Rightarrow 2! - 1! = 1 \cdot 1!$$

$$n = 2 \Rightarrow 3! - 2! = 2 \cdot 2!$$

$$n = 3 \Rightarrow 4! - 3! = 3 \cdot 3!$$

⋮

$$n = 50 \Rightarrow 51! = 50 \cdot 50!$$

$$51! - 1! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 50 \cdot 50!$$

$$\text{Logo: } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 50 \cdot 50! = 51! - 1$$

03 A

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n = x$$

$$2(1) \cdot 2(2) \cdot 2(3) \cdot 2(4) \cdot \dots \cdot 2n = x$$

$$\underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)}_{n!} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{n \text{ vezes}} = x$$

$$n! \cdot 2^n = x$$

04 B

Desde que o algarismo das unidades seja par e diferente de zero, têm-se 4 maneiras de escolher esse algarismo. Portanto, como existem 10 possibilidades para o algarismo das dezenas e 10 maneiras de escolher o algarismo das centenas, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

05 D

Pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

06 A

■ Total de placas possíveis no modelo em estudo: $26^4 \cdot 10^3$

■ Total de placas possíveis no modelo atual: $26^3 \cdot 10^4$

■ Razão entre os dois valores: $\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = 2,6$

Portanto, o aumento será de $2,6 - 1 = 1,6$ (160%), ou seja, menos que o dobro.

07 B

Há 3 escolhas para a cor da pedra que ficará no vértice A. Além disso, podem ocorrer 2 casos em relação às pedras que ficarão nos vértices B e D: (I) as cores das pedras em B e D são iguais; (II) as cores das pedras em B e D são distintas.

Portanto, as configurações possíveis são:

$(A, B, C, D) = (3, 1, 2, 1)$, e $(A, B, C, D) = (3, 2, 1, 1)$, o que corresponde a $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ joias distintas.

08 A

Pelo PFC, existem $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$ respostas possíveis. Portanto, o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta, porque há $280 - 270 = 10$ alunos a mais do que o número de respostas possíveis.

09 C

Observando a diferença entre a pontuação total da Escola II e a das outras escolas, tem-se que a Escola II será campeã quaisquer que sejam as notas das Escolas I, III e V. Logo, em relação a essas escolas, há 5 notas favoráveis para cada uma.

Por outro lado, como a Escola II vence a Escola IV em caso de empate, e tendo a Escola IV uma vantagem de dois pontos em relação à Escola II, a última será campeã nos seguintes casos:

■ 6 para a Escola IV e 8,9 ou 10 para a Escola II;

■ 7 para a Escola IV e 9 ou 10 para a Escola II;

■ 8 para a Escola IV e 10 para a Escola II.

Assim, a resposta é $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$.



Atividades propostas

01 E

Seja $S = 30!$; então:

$$S = 30 \cdot 29 \cdot 28 \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Sabe-se que, como S é obtido pelo produto dos números naturais de 1 a 30, todos os números primos que aparecem nesse intervalo são divisores de $S = 30!$.
Portanto, a soma é igual a:
 $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129$

02 A

$$\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}(n-2)!}{(n+1)!(n-1)\cancel{(n-2)!}} = 4 \Rightarrow$$

$$\frac{n+2}{n-1} = 4 \Rightarrow 4n - 4 = n + 2 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

03 B

$$n! + 1 + n! + 2 + \dots + n! + n = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$\underbrace{n! + n! + n! + \dots + n!}_n + \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\text{P.A. de } n} = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$n \cdot n! + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2 + 49n}{2}$$

$$n \cdot n! = \frac{n^2 + 49n}{2} - \frac{n^2 + n}{2}$$

$$n \cdot n! = \frac{48n}{2}$$

$$n \cdot n! = 24n$$

$$n! = 4!$$

$$n = 4$$

04 E

$$A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 49 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 50}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 50} \right)$$

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 25} =$$

$$A = \frac{50!}{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{25 \text{ vezes}} \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25)}_{25!}} = \frac{50!}{2^{25} \cdot 25!}$$

05 A

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

$$\vdots$$

$$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \alpha \dots yxz0$$

$$4! + 6! + 8! + \dots + 100! = \alpha \dots yx4$$

↘ Algoritmo das unidades

06 A

$$\frac{n! \cdot 3^{n+1}}{3^{n-2} \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot 3^{n+1}}{3^{n-2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} =$$

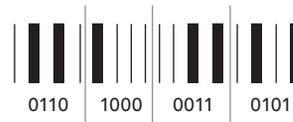
$$\frac{3^{n+1-(n-2)}}{n^2 + 3n + 2} = \frac{3^3}{n^2 + 3n + 2} = \frac{27}{n^2 + 3n + 2}$$

07 B

Considerando como vogais apenas as letras **a, e, i, o e u**, há 5 possibilidades para cada letra e 5 possibilidades para cada algarismo. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $5^7 = 78125$.

08 A

De acordo com as informações, tem-se:

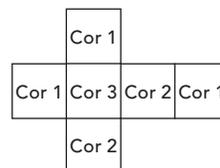


Portanto, esse código corresponde ao número 6835.

09 D

Pelo Princípio Multiplicativo, podem-se formar $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 = 23^4$ códigos, sem qualquer restrição, utilizando-se 23 letras do alfabeto. Por outro lado, o número de códigos em que figuram apenas vogais, também pelo Princípio Multiplicativo, é dado por $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Em consequência, o resultado pedido é igual a $23^4 - 5^4$.

10 B



De acordo com as condições do problema, no máximo três faces utilizarão a primeira cor, no máximo 2 faces, a segunda cor, e, finalmente, uma face, a terceira cor. Portanto, o menor número de cores necessárias para pintar o cubo é 3.

11 D

Princípio Fundamental da Contagem

$$\underbrace{6}_{\text{entrar}} \cdot \underbrace{5}_{\text{sair}} = 30$$

12 B

Considerando os percursos ABCX, ADEX, AFX.

$$ABCX \Rightarrow \underbrace{A \rightarrow B}_{1} \underbrace{B \rightarrow C}_{2} \underbrace{C \rightarrow X}_{3} = 6 \text{ caminhos.}$$

$$ADEX \Rightarrow \underbrace{A \rightarrow D}_{2} \underbrace{D \rightarrow E}_{2} \underbrace{E \rightarrow X}_{3} = 12 \text{ caminhos.}$$

$$AFX \Rightarrow \underbrace{A \rightarrow F}_{3} \underbrace{F \rightarrow X}_{2} = 6 \text{ caminhos.}$$

Total: $6 + 12 + 6 = 24$ caminhos.

13 C

Cores primárias: 3 (vermelho, amarelo e azul).
 Cores secundárias: 3 (verde [amarelo + azul], violeta [azul + vermelho] e laranja [amarelo + vermelho]).
 Cada uma dessas cores terá três tonalidades (normal, clara e escura).
 Preto e branco: 2.
 Portanto, o total de cores será $3 \cdot (3 + 3) + 2 = 20$.

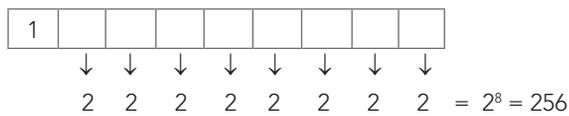
14 D

Cada ponto pode ou não se destacar em relação aos demais. Logo, pelo Princípio Fundamental da contagem, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ conjuntos possíveis, sendo que em um deles nenhum dos pontos se destaca em relação aos demais. Portanto, o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é $64 - 1 = 63$.

15 B

Números primos do teclado: 2, 3, 5, 7
 Número de senhas: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

16 C



17 B

A estratégia conveniente é retirar as letras na ordem FGV ou GFV. De fato, considerando a sequência FGV, para que as letras sejam da mesma cor, pelo Princípio das Gavetas, a pessoa deverá retirar 6 letras F, 8 letras G e 1 letra V, totalizando 15 letras. O raciocínio para a sequência GFV é análogo.

18 E

Há apenas duas sequências possíveis (I = interior; L = litoral)
 ILILILILILIL ou LILILILILILI
 Em números, tem-se:
 $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2$