Resoluções

Capítulo 16

Análise combinatória III – Permutações simples; Permutações com elementos repetidos; Permutações circulares

ATIVIDADES PARA SALA

01
- O total de anagramas consiste na permutação das letras. São seis letras, logo: 6! = 720 anagramas.
- Começando com L, tem-se: L _ _ _ _ _ com as cinco letras permutando: 5! = 120 anagramas.
- Terminando com vogal, tem-se: _ _ _ _ _ A
  ou _ _ _ _ _ E: 5! · 2 = 120 · 2 = 240.

02 $P_{C(8)} = (8 - 1)! = 7! = 5040$

03 Os números de anagramas serão uma permutação de 10 letras com repetição, em que a letra M aparece 2 vezes, a letra O aparece 4 vezes e a letra S aparece 2 vezes:

$$P_{10}^{2,4,2} = \frac{10!}{2!4!2!} = \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2!}\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}} \Rightarrow$$

$10\cdot 9\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 37800$

04 **E**

Para encontrar a ordem do número 75913 devem-se fazer todas as permutações possíveis antes do número 75913, utilizando apenas os algarismos ímpares, ou seja, 1, 3, 5, 7 e 9. Assim, têm-se:

Começando com 1: 4! = 24
Começando com 3: 4! = 24
Começando com 5: 4! = 24
Começando com 71: 3! = 6
Começando com 73: 3! = 6
Começando com 751: 2! = 2
Começando com 753: 2! = 2
O próximo será 75913

Logo, 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89 (octogésima nona posição).

05 Deve-se, inicialmente, escolher a ordem das matérias, o que pode ser feito de 3! modos. Depois, deve-se, em cada matéria, escolher a ordem em que se apresentarão os livros, 5! 3! 2!.

Pelo Princípio Multiplicativo, tem-se:

3! 5! 3! 2! = 6 · 120 · 6 · 2 = 8640

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 a) CONCURSO possui 8 letras, e as letras C e O aparecem duas vezes cada. Assim, tem-se:

$$P_8^{2,2} = \frac{8!}{2!\,2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cancel{4}} = 10\,080$$

b) MATEMÁTICA possui 10 letras. Observe que a letra M aparece 2 vezes, a letra A aparece 3 vezes (desconsiderando a acentuação), e a letra T, 2 vezes. Assim, tem-se:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{2}} = 151\,200$$

02 **D**

O número de anagramas possíveis da palavra LÓGICA é igual à permutação de 6.

Logo, de acordo com o enunciado, a soma dos ângulos internos de um polígono é 720. Assim:

$S = 720 \Rightarrow (n - 2)\cdot 180° = 720 \Rightarrow n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$

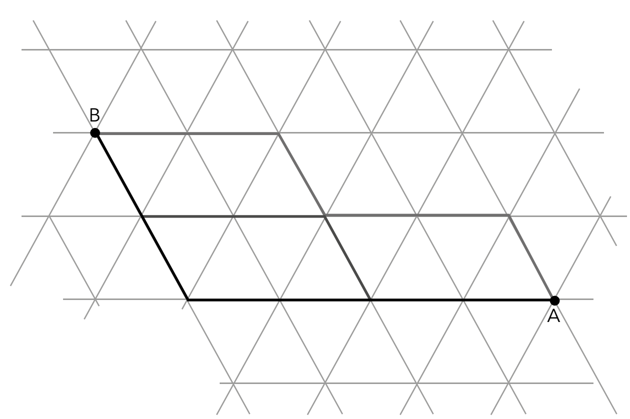
O polígono regular de 6 lados é denominado hexágono.

03 **E**

P F F F F P

Há duas possibilidades para o posicionamento dos pais e $P_4 = 4! = 24$ modos de posicionar os filhos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o resultado buscado é 2 · 24 = 48.

04 **B**



O menor caminho será formado por dois lados inclinados e quatro lados horizontais. Logo, tem-se:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot \cancel{4!}} = 15$$

05 Sendo o número de presentes igual a 6, tem-se:

$$P_{(6-1)} = P_5 = 5! = 120$$

06 Como o pai e a mãe devem estar sempre juntos, eles serão tratados como um único elemento. Logo, n = 4. Assim, tem-se:

$$P_C = P_{(n-1)} \Rightarrow P_{(4-1)} = P_3 = 3! = 6$$

Como há duas possibilidades para o posicionamento dos pais (pai – mãe ou mãe – pai), pelo Princípio Multiplicativo, têm-se $2 \cdot 6 = 12$ disposições diferentes de organizar a família à mesa.

07 Com dezena de milhar igual a 1, tem-se: 1_ _ _ _ $= 1 \cdot 4! = 24$ números. Para a trigésima posição, faltam 6 números. Logo, serão números com dezena de milhar 2 e unidade de milhar 1: 21_ _ _ . São exatamente 3! = 6 números. O maior deles será 21 543. O algarismo das unidades será o 3.

08 Em ordem decrescente, os números iniciarão com a dezena de milhar 9. As ordens restantes vão permutando entre si, sem restrições até a dezena de milhar igual a 7. A partir daí, controlam-se os números até o desejado:

- 9_ _ _ _ : 4! = 24 números
- 8_ _ _ _ : 4! = 24 números
- 79_ _ _: 3! = 6 números
- 78_ _ _: 3! = 6 números
- 759_ _: 2 números
- 758_ _: 2 números

Até aqui tem-se: 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 64. Os números restantes são 75 398 e 75 389, que ocupam, respectivamente, a 65ª e a 66ª posição.

09 **E**

Como há restrições para a 1ª e a 7ª posição, deve-se, em primeiro lugar, calcular o número de possibilidades para essas posições.

Número de possibilidades $\rightarrow 4 \cdot \underbrace{P_5}_{} \cdot 3$

$12 \cdot 5! = 1\,440$

Logo, as músicas podem ser apresentadas em 1 440 sequências diferentes.

10 Considere N o número de pinos azuis. O total de pinos será (N + 2). O total de permutações será com repetição de 2 cores verdes e N cores azuis:

$$P_{N+2}^{N,2} = \frac{(N+2)!}{2!N!} = 15 \Rightarrow \frac{(N+2)\cdot(N+1)\cdot \cancel{N!}}{2!\cancel{N!}} = 15 \Rightarrow$$

$$(N+2)\cdot(N+1) = 30 \Rightarrow N^2 + 3N + 2 - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$N^2 + 3N - 28 = 0 \Rightarrow N = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-28)}}{2} \Rightarrow$$

$$N = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} \Rightarrow \begin{cases} N' = \dfrac{-3+11}{2} = 4 \\ N'' = \dfrac{-3-11}{2} = -7\ (< 0 \quad \rightarrow \text{não convém}) \end{cases}$$

Logo, há 4 pinos azuis.