Resoluções

Capítulo 13

Sistemas lineares III – Discussão de um sistema linear

ATIVIDADES PARA SALA

01

$$\begin{cases} x-2y=3 & \cdot(-2)\ \cdot(-m) \\ 2x+y=1 \\ mx-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 0+5y=-5 \\ 0+(2m-1)y=2-3m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=3 \longrightarrow x=1 \\ 0+y=-1 \longrightarrow y=-1 \\ 0+(2m-1)y=2-3m \end{cases}$$

Substituindo y = –1 na última equação, tem-se:

$(2m-1)\cdot(-1) = 2-3m \Rightarrow m = 1$

Isto é:

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow \text{sistema possível determinado (SPD)} \\ m\neq 1 \Rightarrow \text{sistema impossível (SI)} \end{cases}$$

02 Se $D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$ (SPD)

Se $D = 0 \Rightarrow k-2=0 \Rightarrow k=2$. Se $k=2, \begin{cases} 2x+y=1 & \cdot(-1) \\ 2x+y=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 0+0=2 \text{ (falso)} \end{cases}$$

Logo,

$k \neq 2 \Rightarrow$ SPD e $k = 2 \Rightarrow$ SI

03 Matriz completa $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot(-1)\ \cdot(-2) \quad \text{tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot(-1) \text{ tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pela 3ª linha, tem-se:}$$

$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0 \Rightarrow$ SPI

04 **E**

$$\text{Matriz completa} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot 1 \quad \text{tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 1 \quad \text{tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ pela última linha, tem-se:}$$

$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=6 \Rightarrow \text{SI} \Rightarrow S=\varnothing$

05 **C**

$$D = \begin{vmatrix} 6 & k \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -2k-42$$

Para $D \neq 0$, tem-se:

$-2k-42 \neq 0 \Rightarrow 2k \neq -42$

$k \neq -21$

Sabendo que, de acordo com o determinante, tem-se um sistema possível e determinado quando D ≠ 0 e sistema possível indeterminado ou impossível quando D = 0. Conclui-se que o sistema em questão é possível e determinado para todo $k \neq -21$.

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 $D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1 \text{ e } k \neq -1 \text{(SPD)}$

$$\text{Se } k = 1, \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \quad \text{(SPI)} \end{cases}$$

$$\text{Se } k = -1, \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \quad \text{(SI)} \end{cases}$$

Logo,

$k \neq 1 \text{ e } k \neq -1 \Rightarrow \text{SPD}$

$k = 1 \Rightarrow \text{SPI}$

$k = -1 \Rightarrow \text{SI}$

02

$$\begin{cases} x - y = 2 & \cdot(-2)\ \cdot(-1) \\ 2x - y = 1 & \xleftarrow{+} \\ x + y = a & \xleftarrow{+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 0 + y = -3 & (-2) \\ 0 + 2y = a - 2 & \xleftarrow{+} \end{cases} \therefore \begin{cases} x - y = 2 \Rightarrow x = -1 \\ y = -3 \\ 0 = a + 4 \end{cases}$$

Se $a = -4 \Rightarrow \text{SPD}$

Se $a \neq -4 \Rightarrow \text{SI}$

03 O sistema é homogêneo, portanto aceita apenas a solução trivial ou é SPI.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ k & 2 & 2 & k & 2 \end{array}\right|$$

$$-3k \quad -2 \quad 4 \quad 6 \quad -k \quad 4$$

$= 6 - k + 4 - 3k - 2 + 4 = -4k + 12$

Então: $-4k + 12 = 0 \Rightarrow k = 3$

Se $k \neq 3 \Rightarrow \text{SPD}$

Isto é, somente solução trivial.

Se $k = 3 \Rightarrow \text{SPI}$

04 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5$

O sistema é determinado.

05 Neste caso, o sistema deve ser indeterminado, e será tido que det A = 0.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a^2 - a = 0 \Rightarrow a \cdot (a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1$$

06 **B**

A matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & b \end{bmatrix}$$

ou em uma ordem conveniente:

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & b & b \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-4)\ \cdot(-b) \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array}$$

Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1-b & 0 & b \end{bmatrix}$$

Pelo sistema, x = 5 e y = −5. Substituindo esses valores em x + by = b, temos:

$$5 - 5b = b \Rightarrow 6b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{6}$$

07 **D**

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y + mz = 0 \end{cases}$$

Admite solução única $\Leftrightarrow D \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \\ 6 & -15 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$$

08 **B**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ 4 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(4) \\ \hookleftarrow \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ 0 & a+8 & 1+4b \end{pmatrix}$$

$$a + 8 = 0 \Rightarrow a = -8 \text{ e } 1 + 4b \neq 0 \Rightarrow b \neq -\frac{1}{4}$$

09 **E**

Matriz completa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & k \end{vmatrix}$$

Somando a 1ª linha à 2ª e, em seguida, somando a 1ª linha multiplicada por (–1) à 3ª linha, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & (k-5) \end{bmatrix}$$, o sistema será possível somente se k – 5 = 7 ou k = 12.

10 Escalonando o sistema dado:

Etapa 1:

Multiplicam-se ambos os membros da primeira equação, respectivamente, por (–3) e por (–4); em seguida, adiciona-se membro a membro, à segunda e à terceira equação, obtendo-se, com estas operações, o sistema equivalente a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -7y + 14z = -10 \\ -7y + (\alpha^2 - 2)z = \alpha - 14 \end{cases}$$

Etapa 2:

Multiplica-se por (–1) a segunda equação e, em seguida, adiciona-se à terceira, obtendo-se, com essa operação, o sistema escalonado seguinte equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -7y + 14z = -10 \\ (\alpha^2 - 16)z = \alpha - 4 \end{cases}$$

Nessas condições, para que o sistema dado seja impossível, deve-se ter no sistema equivalente anterior, necessariamente:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 16 = 0 \\ \alpha - 4 \neq 0 \end{cases}$$

ou seja, $\alpha = -4$

Portanto, o sistema dado é impossível para $\alpha = -4$.