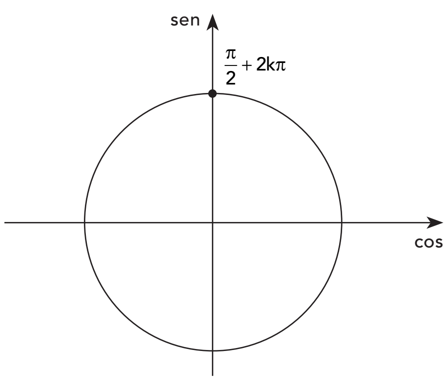
Módulo 5 Trigonometria V – Função seno

Atividades para sala

01 C



$$\frac{\pi t}{12} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \qquad (:\pi)$$
$$\frac{t}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + 2k \Rightarrow$$
$$\frac{t}{12} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 2k \cdot (12)$$
$$t = 6 + 8 + 24k \Rightarrow t = 14 + 24k$$

- Se $k = 0 \Rightarrow t = 14 + 24 \cdot 0 \Rightarrow t = 14$ h
- Se $k = 1 \Rightarrow t = 14 + 24 \cdot 1 \Rightarrow t = 38$ h (não convém)

02 B

A função y = sen (x) tem período 2π e amplitude 1 (altura da telha).

De acordo com o gráfico, a nova telha será fabricada com base em uma função de período π e amplitude 3.

O período P de uma função da forma y = sen (rx) é dado por $P = \frac{2\pi}{r}$; tem-se $\pi = \frac{2\pi}{r} \Rightarrow r = 2$. Assim, a nova função será y = 3 sen (2x).

03 C

Do gráfico, tem-se:

I. $|\beta| = 5 - 3 \Rightarrow |\beta| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

II. $p = \frac{2\pi}{|\theta|} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{1}{4} \\ \theta = -\frac{1}{4} \end{cases}$

III. O valor médio de g(t) é 3, logo, $\alpha = 3$.

Assim:

Hipótese 1: $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\theta > 0$

$g(t) = 3 + 2\text{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$

Portanto: $|\alpha + \beta + \theta| = \left|3 + 2 + \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{21}{4}\right| = \frac{21}{4}$

Hipótese 2: $\alpha > 0$; $\beta < 0$; $\theta < 0$

$g(t) = 3 - 2\text{sen}\left(-\frac{t}{4}\right)$

Portanto: $|\alpha + \beta + \theta| = \left|3 - 2 - \frac{1}{4}\right| = \left|1 - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$ (não convém)

Hipótese 3: $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\theta < 0$

$g(t) = 3 + 2\text{sen}\left(-\frac{t}{4}\right)$

Note que, para $t = 2\pi$, tem-se:

$g(2\pi) = 3 + 2\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{4}\right) = 3 + 2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2(-1) = 1$ (não convém)

Hipótese 4: $\alpha > 0$; $\beta < 0$; $\theta > 0$

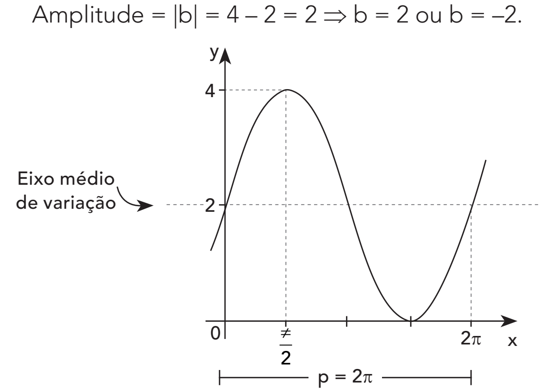
$g(t) = 3 - 2\text{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$

Note que, para $t = 2\pi$, tem-se:

$g(2\pi) = 3 - 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 3 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 2(1) = 1$ (não convém)

04 D

a) (F) Para a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen } x$, tem-se que:
Amplitude $= |b| = 4 - 2 = 2 \Rightarrow b = 2$ ou $b = -2$.



Como o eixo médio de variação passa pelo ponto (0, 2), tem-se que a = 2.

Logo, se $f(x) = 2 + 2 \cdot \text{sen } x$, então

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ (o resultado convém).}$$

Se $f(x) = 2 - 2 \cdot \text{sen } x$, então

$$f(x) = 2 - 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ (o resultado não convém).}$$

Assim, conclui-se que a função é $f(x) = 2 + 2 \cdot \text{sen } x$ com período 2π.

b) (F) O gráfico mostra que no intervalo onde $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ ***f*** é decrescente.

c) (F) A imagem do gráfico corresponde ao intervalo [0, 4].

d) (V) $y = f(x) = 2 + 2 \cdot \text{sen } x$

$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) = 2 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{19}{4}\pi\right)$$

$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) = 2 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \underbrace{\frac{16\pi}{4}}_{2\,\text{voltas}}\right)$$

$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) = 2 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) = 2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) = 2 + \sqrt{2}$$

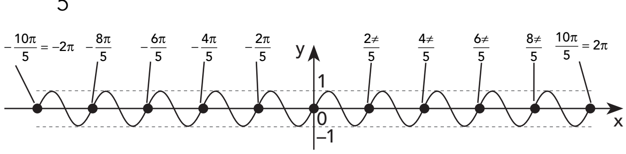
$$y = f\left(\frac{19}{4}\pi\right) \cong 3{,}4$$

Logo, $2 < y < 4$.

e) (F) O período de ***f*** é igual a 2π.

05 **C**

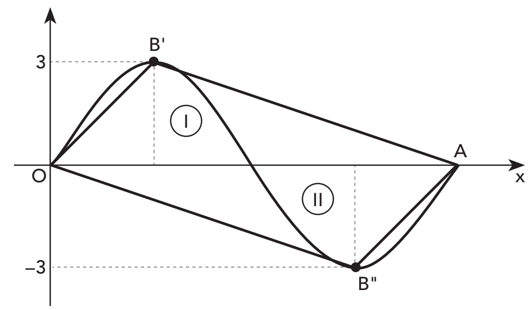
Inicialmente, observa-se que o período de $f(x) = \text{sen } 5x$ é $p = \frac{2\pi}{5}$, com base no qual obtém-se o seguinte gráfico:



Contabilizam-se 21 interseções do eixo **x** com a função $f(x) = \text{sen } 5x$.

06 **B**

Observe, no gráfico a seguir, que tanto o triângulo I como o II atendem ao pedido do problema.



Note, ainda, que a base ($\overline{OA}$) é constante e vale o período da função. Dessa forma, para $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, obtém-se $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow p = 8$. A máxima altura do triângulo ocorre quando $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \pm 1$.

Logo: $f(x) = 3\,(\pm 1) = \pm 3$. Portanto:

$$A_{\text{máx.}} = \frac{\overline{OA} \cdot |(x)|}{2} = \frac{8 \cdot |\pm 3|}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

Atividades propostas

01 **B**

Para t = 0, a altura em metros é:

$$h(0) = 11{,}5 + 10 \cdot \text{sen}\left(\frac{-26\pi}{12}\right) = 11{,}5 + 10 \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6{,}5$$

02 **D**

O período é dado por $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = 24$.

Portanto, o tempo para uma volta é 24 segundos.

03 **E**

Como $0 \leq x \leq 24 \Rightarrow 0 \leq \frac{x\pi}{12} \leq 2\pi$, tem-se:

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right) \leq 1 \Rightarrow -800 \leq -800\,\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right) \leq 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \leq 900 - 800\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \leq 1700 \Rightarrow 100 \leq f(x) \leq 1700.$$

Logo, a diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é de 1 700 – 100 = 1 600.

04 **E**

Observe, inicialmente, que $t \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$.

O valor mínimo de P ocorrerá quando $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$ for –1, e essa possibilidade sucede para $\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ + 2kπ, com **k** inteiro. Portanto: $\frac{t}{6}$ = 1 + 2k ⇒ t = 6 + 12k ⇒ t = 6 para k = 0, que representa junho de 2010.

O valor máximo de P ocorrerá quando sen $\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$ for 1, e essa possibilidade sucede para $\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, com **k** inteiro.

Portanto: $\frac{\neq}{6}$ = 2k ⇒ t = 12k ⇒ t = 12, que representa dezembro de 2010.

05 D

O dia com maior quantidade de horas de luz solar ocorre quando D(t) é máximo, assim:

$$[D(t)]_{\text{máx.}}=\frac{6}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right)\right]_{\text{máx.}}+12$$

$$\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right]=1$$

$$\frac{2\pi}{365}(t-79)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t-79=\frac{365}{4}$$

$$\Rightarrow t=91{,}25+79\Rightarrow t=170{,}25$$

Para ano não bissexto	Para ano bissexto
Jan. 31	Jan. 31
Fev. 28	Fev. 29
Mar. 31	Mar. 31
Abr. 30	Abr. 30
Maio 31	Maio 31
Jun. 19,25 +	Jun. 18,25 +
170,25	170,25

Portanto, o dia com maior quantidade de luz solar ocorrerá na segunda quinzena de junho.

06 A

O dia com menor quantidade de luz solar ocorre quando D(t) é mínimo, assim:

$$[D(t)]_{\text{mín.}}=\frac{6}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right)\right]_{\text{mín.}}+12$$

$$\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right]=-1$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{365}(t-79)=\frac{3\cancel{\pi}}{2}\Rightarrow t-79=\frac{3\cdot 365}{4}$$

$$\Rightarrow t-79=273{,}75\Rightarrow t=352{,}75$$

Para ano não bissexto	Para ano bissexto
Jan. 31	Jan. 31
Fev. 28	Fev. 29
Mar. 31	Mar. 31
Abr. 30	Abr. 30
Maio 31	Maio 31
Jun. 30	Jun. 30
Jul. 31	Jul. 31
Ago. 31	Ago. 31
Set. 30	Set. 30
Out. 31	Out. 31
Nov. 30	Nov. 30
Dez. 18,75 +	Dez. 17,75 +
352,75	352,75

Assim, o dia com menor quantidade de luz solar ocorrerá em dezembro.

07 A

Tem-se que:

$-1 \le \text{sen } x \le 1$

$2^{-1} \le 2^{\text{sen } x} \le 2^1$

$\frac{1}{2}$ ″ $2^{\text{sen } x}$″ 2

+ (1)

$$1+\frac{1}{2}\le 2^{\text{sen } x}+1\le 2+1$$

$$\underbrace{\frac{3}{2}}_{[f(x)]_{\text{mín}}}\le\underbrace{2^{\text{sen } x}+1}_{f(x)}\le\underbrace{3}_{[f(x)]_{\text{máx}}}$$

Assim, tem-se que:

$$[f(x)]_{\text{máx}}\cdot[f(x)]_{\text{mín}}=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}=4{,}5$$

08 B

y = A · sen [B(x + C)]

y = A · sen [Bx + BC]

Logo, $p=\frac{2\pi}{B}$. Portanto, o único parâmetro que necessita alteração é o parâmetro B.

09 E

I. Obtendo o parâmetro **a**:

$-1 \le \text{sen}(\omega x + b) \le 1$

· (5)

$-5 \le 5\,\text{sen}(\omega x + b) \le 5$

Como Im(f) =[−5, 5], a = 5.

II. Obtendo |ω|:

$$p=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow p=\frac{6\pi}{6}=\pi,\text{ mas } p=\frac{2\pi}{|\omega|}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{|\omega|}\Rightarrow|\omega|=2$$

III. Obtendo o menor valor positivo para **b**:

$$\left|\frac{b}{\omega}\right| = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{|b|}{|\omega|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

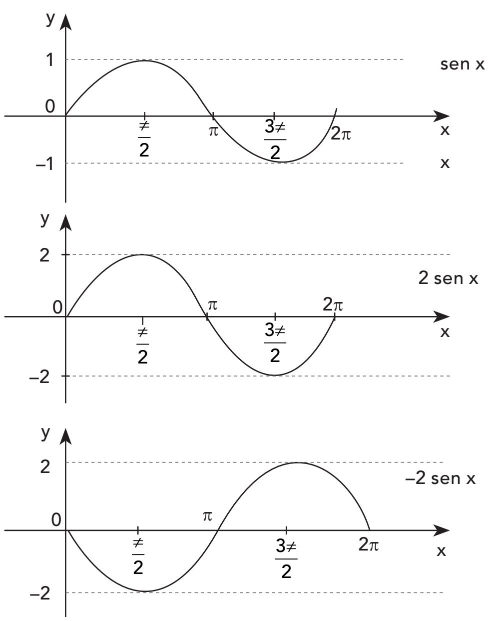
$$\Rightarrow |b| = \frac{\pi}{6}\cdot|\omega| \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{6}\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3} \text{ ou } b = -\frac{\pi}{3} \text{ (não convém)}$$

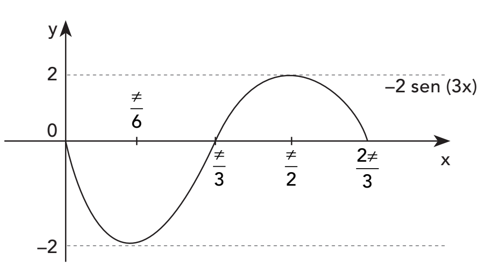
Logo, $a\cdot b\cdot|\omega| = 5\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2 = \frac{10\pi}{3}$.

10 A

Observe a sequência de gráficos a seguir:



Mas tem-se que $p = \frac{2\pi}{3}$, logo:



11 A

Para se calcular o afastamento vertical da partícula, meio segundo após o movimento ter sido iniciado, deve-se, primeiro, calcular $s\left(\frac{1}{2}\right)$. Dessa forma, na função, fazendo

$t = \frac{1}{2}$:

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \frac{1}{4}\,\text{sen}\left(10\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\right) \Rightarrow s\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(5\pi)$$

$$\Rightarrow s\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \frac{1}{4}\cdot 0 \Rightarrow s\left(\frac{1}{2}\right) = 10$$

Em seguida, fazendo t = 0 (posição inicial), calcula-se s(0):

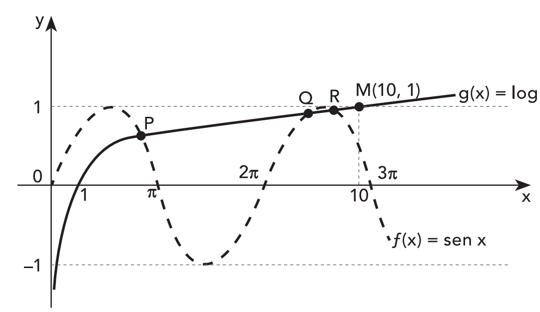
$$s(0) = 10 + \frac{1}{4}\cdot\text{sen}\,(10\pi\cdot 0) \Rightarrow s(0) = 10 + \frac{1}{4}\cdot 0 \Rightarrow s(0) = 10$$

Finalmente, o afastamento é dado por:

$$s\left(\frac{1}{2}\right) - s(0) = 10 - 10 = 0$$

12 C

Considerando os gráficos das funções $f(x)$ = sen x e g(x) = log x:



Pelas características dos dois gráficos, verifica-se que os pontos P, Q e R são os únicos pontos que pertencem tanto a $f(x)$ quanto a g(x).

Observação: o ponto M(10, 1) merece atenção especial, uma vez que, à sua direita, a função g(x) assume valores maiores que 1, o que garante o fato de não existirem mais interseções entre dois gráficos.