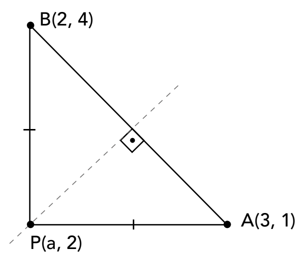
Resoluções

Capítulo 18

Divisão de segmentos

ATIVIDADES PARA SALA

01 Fazendo uma figura auxiliar:



Se P é equidistante de A e B, tem-se:

$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (4-2)^2}$

$(3-a)^2 + (-1)^2 = (2-a)^2 + 2^2$

$9 - 6a + a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 4$

$-2a = -2$

$a = 1$

02
- $r = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{x_C - (-3)}{1 - x_C} = -\frac{7}{3}$

  $\Rightarrow \frac{x_C + 3}{1 - x_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow 3x_C + 9 = -7 + 7x_C \Rightarrow 4x_C = 16 \Rightarrow x_C = 4$

- $r = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y_C - (-5)}{-1 - y_C} = -\frac{7}{3}$

  $\Rightarrow \frac{y_C + 5}{-1 - y_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow 3y_C + 15 = 7 + 7y_C \Rightarrow 4y_C = 8 \Rightarrow y_C = 2$

Logo, o ponto C é C(4, 2).

03 Ponto médio de $\overline{AB}$ $= M = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (-1, -1)$

Ponto médio de $\overline{BC}$ $= N = \left(\frac{-3-2}{2}, \frac{-5+2}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Ponto médio de $\overline{AC}$ $= P = \left(\frac{1-2}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

04 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right| = 4 - 2 + 15 + 4 - 10 - 3 = 8$$

$S_{ABC} = 4$ u.a

05 Sejam M, N e P os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente.

$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = (2, 6)$

$N = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (0, 1)$

$P = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{7-3}{2}\right) = (-1, 2)$

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right| = \frac{1}{2} \cdot |2 - 6 + 1 - 4| = \frac{7}{2} \text{ u.a}$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 Considerando $M(x_M, y_M)$, tem-se:

a)
- $x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

  $y_M = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

  $M(1, -4)$

- $x_M = \frac{\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

  $y_M = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2}$

  $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

- $x_M = \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

  $y_M = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

  $M\left(3, \frac{7}{2}\right)$ ou $M\left(3, 3\frac{1}{2}\right)$

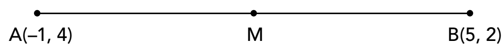
b) Como $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, então:

$$-3=\frac{7+x}{2} \Rightarrow 7+x=-6 \Rightarrow x=-13$$

$$24=\frac{13+y}{2} \Rightarrow 13+y=48 \Rightarrow y=35$$

Logo, B(–13, 35).

02 a) Fazendo uma figura:

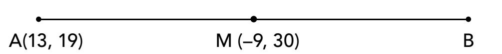


$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow x_M=\frac{-1+5}{2} \Rightarrow x_M=2$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow y_M=\frac{4+2}{2} \Rightarrow y_M=3$$

Portanto, M(2, 3).

b) Sejam x_B e y_B as coordenadas do ponto B, tem-se:



$$-9=\frac{13+x_B}{2} \qquad 30=\frac{19+y_B}{2}$$

$$x_B+13=-18 \qquad y_B+19=60$$

$$x_B=-31 \qquad y_B=41$$

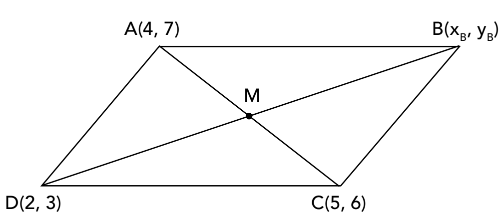
Portanto, B(–31, 41).

03 a) $x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow x_M=\frac{5+7}{2}=6$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow y_M=\frac{1+(-9)}{2}=-4$$

Logo, o ponto M é M(6, –4).

b) O ponto M de encontro das diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas.



Como M é ponto médio de $\overline{AC}$, tem-se:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2} \text{ e } y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{7+6}{2}=\frac{13}{2}$$

Logo, $M\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

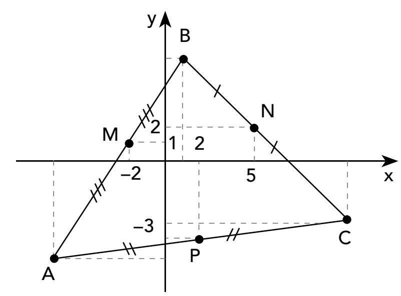
Como M também é ponto médio de $\overline{BD}$, tem-se:

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{x_B+2}{2} \Rightarrow x_B=7$$

$$y_M=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13}{2}=\frac{y_B+3}{2} \Rightarrow y_B=10$$

Logo, B(7, 10).

04



Observando a figura, tem-se:

- M é ponto médio de $\overline{AB}$. Então:

$$\frac{x_A+x_B}{2}=-2 \Rightarrow x_A+x_B=-4$$

$$\frac{y_A+y_B}{2}=1 \Rightarrow y_A+y_B=2$$

- N é ponto médio de $\overline{BC}$. Então:

$$\frac{x_B+x_C}{2}=5 \Rightarrow x_B+x_C=10$$

$$\frac{y_B+y_C}{2}=2 \Rightarrow y_B+y_C=4$$

- P é ponto médio de $\overline{AC}$. Assim:

$$\frac{x_A+x_C}{2}=2 \Rightarrow x_A+x_C=4$$

$$\frac{y_A+y_C}{2}=-3 \Rightarrow y_A+y_C=-6$$

Têm-se os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x_A+x_B=-4 \\ x_B+x_C=10 \\ x_A+x_C=4 \end{cases}$$

cuja solução é $x_A = -5$; $x_B = 1$; $x_C = 9$; e

$$\begin{cases} y_A+y_B=2 \\ y_B+y_C=4 \\ y_A+y_C=-6 \end{cases}$$

cuja solução é $y_A = -4$; $y_B = 6$; $y_C = -2$

Logo, A(–5, –4), B(1, 6) e C(9, –2).

05 De acordo com o problema, deve-se ter:

d(P, 1) = 2d(P, B)

Aplicando a fórmula:

$$\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2}=2\sqrt{(-4-x)^2+(1-y)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se:

$(3 - x)^2 + (2 - y)^2 = 4[(-4 - x)^2 + (1 - y)^2] \Rightarrow$

$9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 4[16 + 8x + x^2 + 1 - 2y + y^2] \Rightarrow$

$9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 64 + 32x + 4x^2 + 4 - 8y + 4y^2 \Rightarrow$

$-3x^2 - 3y^2 - 38x + 4y - 55 = 0 \Rightarrow$

$3x^2 + 3y^2 + 38x - 4y + 55 = 0$

06 a)

■ $r=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\dfrac{x_C-x_A}{x_B-x_C}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{x_C-1}{11-x_C}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

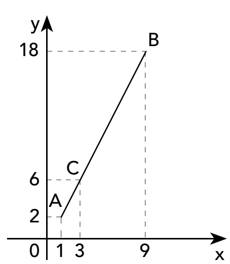
$4x_C-4=11-x_C\Rightarrow 5x_C=15\Rightarrow x_C=3$

■ $r=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\dfrac{y_C-y_A}{y_B-y_C}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{y_C-3}{23-y_C}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

$4y_C-12=23-y_C\Rightarrow 5y_C=35\Rightarrow y_C=7$

Logo, o ponto C é C(3, 7).

b)



■ $r=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\dfrac{x_C-x_A}{x_B-x_C}=\dfrac{3-1}{9-3}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{6}}=\dfrac{1}{3}$

Essa razão também pode ser calculada com as ordenadas dos pontos, ou seja:

■ $r=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\dfrac{y_C-y_A}{y_B-y_C}=\dfrac{6-2}{18-6}=\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{12}}=\dfrac{1}{3}$

c) A(5, 6) — $P(x_P, y_P)$ — $Q(x_Q, y_Q)$ — B(8, 9)

O ponto P divide $\overrightarrow{AB}$ na razão $\dfrac{1}{2}$. Logo, tem-se:

■ $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\dfrac{x_P-x_A}{x_B-x_P}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x_P-5}{8-x_P}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$2x_P-10=8-x_P\Rightarrow x_P=6$

Analogamente, tem-se:

■ $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\dfrac{y_P-y_A}{y_B-y_P}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{y_P-6}{9-y_P}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$2y_P-12=9-y_P\Rightarrow y_P=7$

Assim, P(6, 7).

O ponto Q divide $\overrightarrow{AB}$ na razão 2. Logo, tem-se:

■ $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=\dfrac{x_Q-x_A}{x_B-x_Q}=2\Rightarrow\dfrac{x_Q-5}{8-x_Q}=2\Rightarrow$

$x_Q-5=16-2x_Q\Rightarrow x_Q=7$

■ $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=\dfrac{y_Q-y_A}{y_B-y_Q}=2\Rightarrow\dfrac{y_Q-6}{9-y_Q}=2\Rightarrow$

$y_Q-6=18-2y_Q\Rightarrow y_Q=8$

Logo, Q(7, 8).

07 Cálculo das coordenadas de $M(a_1, b_1)$, ponto médio do lado $\overline{BC}$:

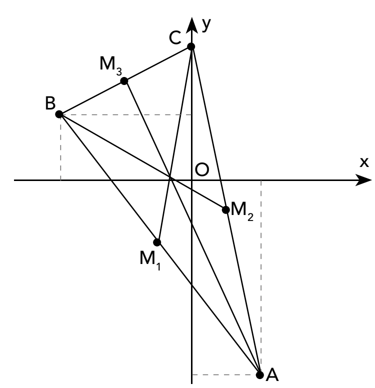
$$\left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{2-4}{2}\Rightarrow a_1=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ b_1=\dfrac{-6+2}{2}\Rightarrow b_1=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow M(-1,-2)$$

Cálculo do comprimento da mediana $\overline{AM}$, sendo A(0, 4) e M(–1, –2):

$$d(A, M)=\sqrt{(-1-0)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$

Assim, a mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC mede $\sqrt{37}$.

08



Observando a figura, tem-se:

M_1 é o ponto médio do lado $\overline{AB}$;

M_2 é o ponto médio do lado $\overline{AC}$;

M_3 é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Cálculo das coordenadas de M_1:

$x=\dfrac{-4+2}{2}=-1\quad y=\dfrac{2-6}{2}=-2$

Cálculo das coordenadas de M_2:

$x=\dfrac{0+2}{2}=1\quad y=\dfrac{4-6}{2}=-1$

Cálculo das coordenadas de M_3:

$x=\dfrac{0-4}{2}=-2\quad y=\dfrac{4+2}{2}=3$

Serão calculados, agora, os comprimentos das medianas:

Mediana AM_3, sendo A(2, 6) e M_3(–2, 3):

$$d(A, M_3) = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+6)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

Mediana BM_2, sendo B(–4, 2) e M_2(1, –1):

$$d(B, M_2) = \sqrt{(1+4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Mediana CM_1, sendo C(0, 4) e M_1(–1, –2):

$$d(C, M_1) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

09 **D**

Sabendo que as coordenadas do baricentro correspondem à média aritmética simples das coordenadas dos vértices do triângulo, vem

$$\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1-1+3}{3}\right) = (3, 1).$$

10 Ponto médio de $\overline{AB} = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (1, 1)$

Baricentro de $ABC = \left(\frac{2+0-2}{3}, \frac{4-2+2}{3}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$

$$D = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{4}{3}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}\ \text{u.c}$$